

Математическая логика и теория вычислимости

Лекция 5. Интуиционистское исчисление высказываний

Денис Николаевич Москвин

ИТМО, корпоративная магистратура JetBrains
Разработка ПО / Software Engineering

10.03.2021

- 1 Интуиционизм
- 2 Модели Крипке
- 3 Полнота ИИВ относительно модели Крипке
- 4 Связь между КИВ и ИИВ

- 1 Интуиционизм
- 2 Модели Крипке
- 3 Полнота ИИВ относительно модели Крипке
- 4 Связь между КИВ и ИИВ

- Возьмем *классическое* гильбертовское исчисление высказываний и отбросим последнюю аксиому (закон исключенного третьего):

$$A \vee \neg A$$

- Часть тавтологий логики высказываний при этом окажутся невыводимыми.
- Получившееся исчисление высказываний носит название *интуиционистского*.
- Основные идеи интуиционизма выдвинул голландский логик и математик Брауэр (Brouwer), интуиционистскую логику предложил его ученик Гейтинг (Heyting).

- **Утверждение:** существуют иррациональные a и b , такие что a^b — рационально.
- **Доказательство.**
 - Если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ рационально, то положим $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$.
 - Если $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ иррационально, то положим $a = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$, $b = \sqrt{2}$.
 - ■ ?
- Интуционист: доказать существование чего-либо, значит построить искомый объект.
- Доказательство существования, обходящееся без построения объекта, обладающего искомым свойством, называют *неконструктивным*.

- A верно (истинно), если у нас есть рассуждение, устанавливающее A .
- $A \wedge B$ — у нас есть рассуждение устанавливающее A и рассуждение устанавливающее B .
- $A \vee B$ — у нас есть либо рассуждение устанавливающее A , либо рассуждение устанавливающее B .
- $A \rightarrow B$ — у нас есть рассуждение, позволяющее установить B , как только кто-то предоставит рассуждение, устанавливающее A .
- $\neg A$ — у нас есть рассуждение, которое приводит к абсурду предположение, что A установлено. То есть $\neg A$ эквивалентно $A \rightarrow \perp$.

- Схемы аксиом:

1 $A \rightarrow B \rightarrow A$

2 $(A \rightarrow B \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B) \rightarrow A \rightarrow C$

3 $A \wedge B \rightarrow A$

4 $A \wedge B \rightarrow B$

5 $A \rightarrow B \rightarrow A \wedge B$

6 $A \rightarrow A \vee B$

7 $B \rightarrow A \vee B$

8 $(A \rightarrow C) \rightarrow (B \rightarrow C) \rightarrow A \vee B \rightarrow C$

9 $\neg A \rightarrow A \rightarrow B$

10 $(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \neg B) \rightarrow \neg A$

- Можно полностью отказаться от унарной связки \neg , используя вместо нее нуль-арную \perp .
- При этом две последние аксиомы заменяют на

$$\perp \rightarrow A$$

Выводимые и невыводимые формулы

- Лемма о дедукции верна и для интуиционистского исчисления высказываний.
- Формула $A \rightarrow \neg\neg A$ по-прежнему выводима:

$$\begin{array}{l} 1 \quad A, \neg A \vdash A \\ 2 \quad A, \neg A \vdash \neg A \\ 3 \quad A \vdash \neg\neg A \quad \neg\text{-intro (1)(2)} \\ 4 \quad \vdash A \rightarrow \neg\neg A \quad \rightarrow \text{intro(3)} \end{array}$$

- А вот закон снятия двойного отрицания $\neg\neg p \rightarrow p$ больше не работает:

$$\begin{array}{l} 1 \quad p, \neg\neg p \vdash p \\ 2 \quad \neg p, \neg\neg p \vdash p \quad \neg\text{-elim} \\ 3 \quad p \vee \neg p, \neg\neg p \vdash p \quad \text{case analysis (1)(2)} \\ 4 \quad p \vee \neg p \vdash \neg\neg p \rightarrow p \quad \rightarrow \text{intro(3)} \end{array}$$

(Это, конечно, не доказательство, докажем чуть позже.)

- $(A \rightarrow B) \rightarrow \neg B \rightarrow \neg A$
- $\neg\neg\neg A \rightarrow \neg A$
- $\neg A \rightarrow \neg\neg\neg A$
- Коммутативность, ассоциативность и обе дистрибутивности для \vee и \wedge сохраняются.
- $A \wedge B \rightarrow C \leftrightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$
- $A \vee B \rightarrow C \leftrightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$
- $\neg(A \vee B) \leftrightarrow \neg A \wedge \neg B$
- $\neg A \vee \neg B \rightarrow \neg(A \wedge B)$, но не наоборот!
- $\neg(A \wedge \neg A)$
- $\neg\neg(A \vee \neg A)$

Независимость закона исключенного третьего

- **Утверждение.** Закон исключенного третьего $p \vee \neg p$ невыводим в интуиционистском исчислении высказываний.
- **Доказательство.** Введем следующую модель:
 - Переменным присваиваем значения из трехэлементного упорядоченного множества: $[p] \in \{F, U, T\}$.
 - $[A \vee B] = \max([A], [B])$
 - $[A \wedge B] = \min([A], [B])$

$[A]$	$[\neg A]$
F	T
U	F
T	F

$[A]$	$[B]$	$[A \rightarrow B]$
F	F	T
F	U	T
F	T	T
U	F	F
U	U	T
U	T	T
T	F	F
T	U	U
T	T	T

$$\neg(p \wedge \neg p)$$

- Формула называется *3-тавтологией*, если она принимает значение T на любых наборах значений переменных из $\{F, U, T\}$.
- **Лемма 1.** Все аксиомы интуиционистского исчисления высказываний суть 3-тавтологии.
- **Лемма 2.** Modus ponens сохраняет свойство “быть 3-тавтологией”.
- Тогда **всякая теорема ИИВ** есть 3-тавтология.
- Но при $[p] = U$ имеем $[p \vee \neg p] = U$, то есть $p \vee \neg p$ не выводима в ИИВ. ■

Невыводимость снятия двойного отрицания

- **Утверждение.** Закон снятия двойного отрицания $\neg\neg p \rightarrow p$ невыводим в ИИВ.

- **Доказательство.**

[p]	[¬p]	[¬¬p]	[¬¬p → p]
F	T	F	T
U	F	T	U
T	F	T	T

- Не 3-тавтология. ■
- **Утверждение.** Закон Пирса $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$ невыводим в ИИВ.

```
GHCi> peirce'sLaw p q = ((p 'imp3' q) 'imp3' p) 'imp3' p
GHCi> check2 peirce'sLaw
[T,T,T,U,T,T,T,T]
```

- **Утверждение.** Классическая тавтология $\neg p \vee \neg\neg p$ невыводима в ИИВ.

- **Доказательство.**

$[p]$	$[\neg p]$	$[\neg\neg p]$	$[\neg p \vee \neg\neg p]$
F	T	F	
U	F	T	
T	F	T	

- **Утверждение.** Классическая тавтология $\neg p \vee \neg\neg p$ невыводима в ИИВ.

- **Доказательство ?**

$[p]$	$[\neg p]$	$[\neg\neg p]$	$[\neg p \vee \neg\neg p]$
F	T	F	T
U	F	T	T
T	F	T	T

- **Ой! Это же 3-тавтология.**

- **Утверждение.** Классическая тавтология $\neg p \vee \neg\neg p$ невыводима в ИИВ.

- **Доказательство ?**

$[p]$	$[\neg p]$	$[\neg\neg p]$	$[\neg p \vee \neg\neg p]$
F	T	F	T
U	F	T	T
T	F	T	T

- Ой! Это же 3-тавтология.
- То есть **полнота ИИВ относительно 3-тавтологий не имеет места.**

- Может быть надо выбрать другую трехзначную модель? Или четырехзначную?

- Может быть надо выбрать другую трехзначную модель? Или четырехзначную?
- Курт Гёдель (Gödel [1932]) показал, что интуиционистская логика высказываний не является конечно-значной логикой.

- Может быть надо выбрать другую трехзначную модель? Или четырехзначную?
- Курт Гёдель (Gödel [1932]) показал, что интуиционистская логика высказываний не является конечно-значной логикой.
- Адекватной моделью для ИИВ служат *алгебры Гейтинга*, расширяющие понятие булевых алгебр.
- Открытые множества в топологическом пространстве образуют алгебру Гейтинга.
- Для интерпретации интуиционистской логики удобно использовать алгебру Гейтинга, элементы которой — открытые подмножества \mathbb{R} .

- Для пропозициональной переменной p оценка — некоторое открытое подмножество \mathbb{R} .
- Для связок оценка задается индуктивно:

$$\begin{aligned} \llbracket A \wedge B \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket \cap \llbracket B \rrbracket \\ \llbracket A \vee B \rrbracket &= \llbracket A \rrbracket \cup \llbracket B \rrbracket \\ \llbracket \neg A \rrbracket &= \text{Int}(\llbracket A \rrbracket^c) \\ \llbracket A \rightarrow B \rrbracket &= \text{Int}(\llbracket A \rrbracket^c \cup \llbracket B \rrbracket) \\ \llbracket \perp \rrbracket &= \emptyset \end{aligned}$$

Здесь $\text{Int}(X)$ — внутренность множества X , а X^c — его дополнение.

- Формула выводима в ИИВ тогда и только тогда, когда для любой оценки переменных ее значением является все множество \mathbb{R} .
- **Покажите, что $p \rightarrow p$ выводима. $\neg(p \wedge \neg p)$ выводима.**

Контрпримеры для невыводимых в ИИВ формул:

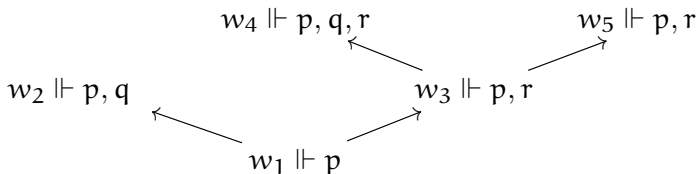
- Для закона исключенного третьего $p \vee \neg p$ оценка $\rho(p) = (0, +\infty)$.
- Для закона $\neg p \vee \neg\neg p$?
- Для закона снятия двойного отрицания $\neg\neg p \rightarrow p$?
- Для закона Пирса $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$?

Всякая классическая тавтология задает в \mathbb{R} *плотное* множество, то есть такое, у которого внутренность дополнения пуста.

- 1 Интуиционизм
- 2 Модели Крипке**
- 3 Полнота ИИВ относительно модели Крипке
- 4 Связь между КИВ и ИИВ

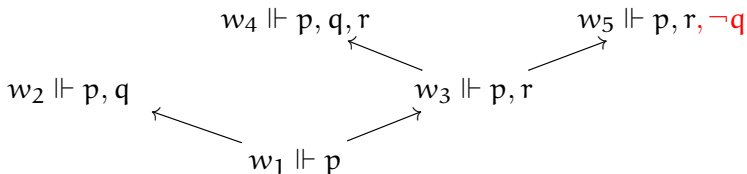
- Модель (шкала) Крипке это:
 - 1 частично упорядоченное множество миров $\langle W, \geq \rangle$;
 - 2 указание истинности (некоторых) пропозициональных переменных в каждом мире, нотация $w \Vdash p$.
- Для заданной шкалы Крипке истинность любой формулы в данном мире определяется индуктивно:
 - если p переменная и $w \Vdash p$, то для любого мира $u \geq w$ верно $u \Vdash p$;
 - $w \Vdash A \wedge B$, если $w \Vdash A$ и $w \Vdash B$;
 - $w \Vdash A \vee B$, если $w \Vdash A$ или $w \Vdash B$;
 - $w \Vdash \neg A$, если для любого мира $u \geq w$ верно $u \not\Vdash A$;
 - $w \Vdash A \rightarrow B$, если для любого мира $u \geq w$, в котором $u \Vdash A$, выполняется также $u \Vdash B$.
- Формула, не являющаяся истинной в данном мире, называется **ложной в этом мире**.

- Пример шкалы Крипке:



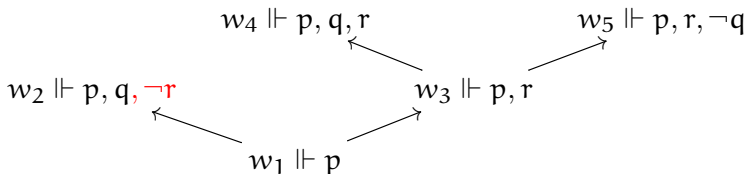
- В каких мирах мы истинна формула $\neg q$? $\neg r$? $q \rightarrow r$?

- Пример шкалы Крипке:



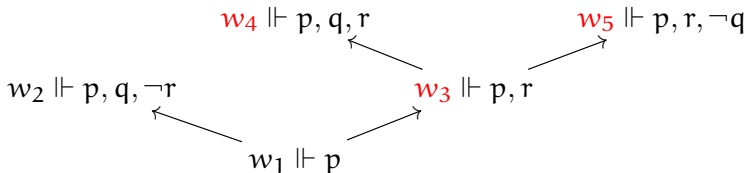
- В каких мирах мы истинна формула $\neg q$? $\neg r$? $q \rightarrow r$?

- Пример шкалы Крипке:



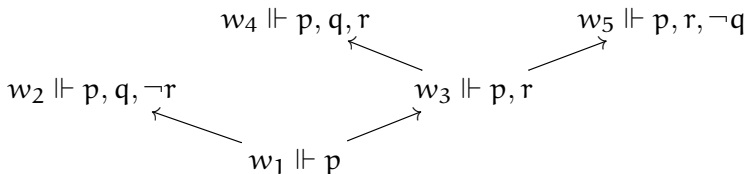
- В каких мирах мы истинна формула $\neg q$? $\neg r$? $q \rightarrow r$?

- Пример шкалы Крипке:



- В каких мирах мы истинна формула $\neg q$? $\neg r$? $q \rightarrow r$?

- Пример шкалы Крипке:



- **Лемма (о монотонности).** Если формула истинна в мире w , то она истинна во всех мирах $u \geq w$.
- **Доказательство.** Индукция по построению формулы. ■

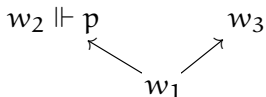
- Теорема (о корректности ИИВ относительно шкал Крипке). Формула, выводимая в интуиционистском исчислении высказываний, истинна во всех мирах любой шкалы Крипке.
- Доказательство.
 - Аксиомы истинны во всех мирах. Покажем, например, для первой $A \rightarrow (B \rightarrow A)$: если для некоторого w имеет место $w \Vdash A$, то в силу монотонности это верно для любого $u \geq w$, откуда следует, что $u \Vdash B \rightarrow A$.
 - Modus ponens сохраняет истинность: если A и $A \rightarrow B$ истинны во всех мирах, то B истинна во всех мирах по правилу истинности для импликации. ■

- Теперь можем доказывать невыводимость формул, предъявляя подходящую контр-модель Крипке.
- $p \vee \neg p$

$$\begin{array}{c} w_2 \Vdash p \\ \uparrow \\ w_1 \end{array}$$

p истинна только в w_2 , $\neg p$ не истинна нигде, тогда $p \vee \neg p$ истинна лишь в w_2 .

- $\neg p \vee \neg\neg p$



- $w_2 \Vdash p$, поэтому $w_1 \not\Vdash \neg p$;
- $w_3 \Vdash \neg p$, поэтому $w_1 \not\Vdash \neg\neg p$;
- откуда $w_1 \not\Vdash \neg p \vee \neg\neg p$.

- Следующие тавтологии КИВ также невыводимы в ИИВ:
- $\neg\neg p \rightarrow p$
- $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow p \rightarrow q$
- $\neg(p \wedge q) \rightarrow \neg p \vee \neg q$
- $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg p \vee q$
- $(p \vee q \rightarrow p) \vee (p \vee q \rightarrow q)$
- $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$
- Для них можно построить подходящие контр-модели Крипке.
- Более того, последнее верно для любой невыводимой в ИИВ формулы.

- 1 Интуиционизм
- 2 Модели Крипке
- 3 Полнота ИИВ относительно модели Крипке**
- 4 Связь между КИВ и ИИВ

Теорема (о полноте ИИВ относительно шкал Крипке).

Для любой формулы, невыводимой в интуиционистском исчислении высказываний, существует шкала Крипке, в одном из миров которой эта формула является ложной.

Доказательство.

- По структуре схоже с доказательством полноты КИВ.
- Однако, поскольку ложность A теперь не влечет истинность $\neg A$, в процессе пополнения истинные и ложные формулы придется «держать отдельно», оперируя не одним (истинным) набором формул, а парой таких наборов (Γ, Δ) , истинным и ложным.

- Пара наборов формул (Γ, Δ) называется *совместной* если есть шкала Крипке и мир в ней, в котором все формулы из Γ истинны, а из Δ ложны.
- Пара (Γ, Δ) называется *противоречивой* если в ИИВ выводима формула

$$\bigwedge \Gamma \rightarrow \bigvee \Delta$$

- Пустая конъюнкция считается заведомо истинной, а пустая дизъюнкция — ложной.
- Противоречивость пары $(\emptyset, \{A\})$ означает выводимость A в ИИВ.
- **Утверждение.** Противоречивая пара несовместна.
- **Доказательство.** Следует из корректности ИИВ относительно шкал Крипке.
- Наша задача — доказать обратное утверждение: непротиворечивая пара совместна.

- **Лемма 1.** Пусть (Γ, Δ) — непротиворечивая пара, а A — произвольная формула. Тогда хотя бы одна из пар $(\Gamma \cup \{A\}, \Delta)$ и $(\Gamma, \Delta \cup \{A\})$ непротиворечива.
- **Доказательство.** Пусть обе противоречивы; докажем, что (Γ, Δ) — противоречива. То есть из выводимости в ИИВ $(\wedge \Gamma) \wedge A \rightarrow (\vee \Delta)$ и $(\wedge \Gamma) \rightarrow \bar{A} \vee (\vee \Delta)$ нужно получить выводимость $(\wedge \Gamma) \rightarrow (\vee \Delta)$.

- 1 $\Gamma \vdash A \vee (\vee \Delta)$
- 2 $\Gamma, A \vdash (\vee \Delta)$
- 3 $\Gamma, (\vee \Delta) \vdash (\vee \Delta)$
- 4 $\Gamma \vdash (\vee \Delta)$ $\vee\text{elim}(1)(2)(3)$



- Фиксируем множество Φ всех подформул всех формул пары (Γ, Δ) .
- Пара (Γ_0, Δ_0) называют *полной* (относительно Φ), если она **непротиворечива** и любая $A \in \Phi$ входит либо в Γ_0 , либо в Δ_0 .
- Свойства полных пар:
 - $\Gamma_0 \cup \Delta_0 = \Phi$;
 - $\Gamma_0 \cap \Delta_0 = \emptyset$.
- **Лемма 2.** Непротиворечивую пару (Γ, Δ) можно расширить до полной (Γ_0, Δ_0) таким образом, что $\Gamma \subset \Gamma_0$ и $\Delta \subset \Delta_0$.
- **Доказательство.** Применяем Лемму 1 ко всем формулам Φ . ■

- Берем невыводимую интуиционистски формулу A . Она определяет
 - непротиворечивую пару $(\emptyset, \{A\})$;
 - множество Φ всех подформул формулы A .
- Дополняем пару $(\emptyset, \{A\})$ до полной (Γ_0, Δ_0) .
- Строим все остальные разбиения Φ , задающие полные пары (Γ_i, Δ_i) .
- Эти пары определяют миры шкалы Крипке следующим образом: если переменная $p \in \Gamma_i$, то в мире $w_i \Vdash p$; если же $p \in \Delta_i$, то $w_i \not\Vdash p$.
- Порядок миров определяется анализом вложенности множеств истинных формул: если $\Gamma_i \subset \Gamma_j$, то $w_i \leq w_j$.

- **Лемма 3.** В построенной шкале в мире w_i истинны все формулы Γ_i и ложны все формулы Δ_i .
- **Доказательство (скелет).** Индукция по структуре каждой из формул Γ_i и Δ_i .
 - **База.** Для переменных это верно по построению.
 - **Шаг.** Перебор связок (см. Верещагин, Шень ЯиИ, 2.4).
-
- Из этой леммы следует, что любая непротиворечивая пара совместна.
- Итак, стартовали с невыводимой интуиционистски формулы A , дополнили пару $(\emptyset, \{A\})$ до полной (Γ_0, Δ_0) .
- Полная пара (Γ_0, Δ_0) задает мир w_0 шкалы Крипке, в котором формула A является ложной.

- 1 Интуиционизм
- 2 Модели Крипке
- 3 Полнота ИИВ относительно модели Крипке
- 4 Связь между КИВ и ИИВ

- **Теорема Гливленко.** Формула A выводима в классическом исчислении высказываний тогда и только тогда, когда $\neg\neg A$ выводима в интуиционистском исчислении высказываний.
- **Доказательство. (скелет)**
 - В одну сторону — тривиально.
 - В другую: показываем, что вывод A в КИВ может быть преобразован в вывод $\neg\neg A$: двойное отрицание аксиом дают тавтологии и МР верен в виде

$$\frac{\Gamma, \neg\neg A \quad \Gamma, \neg\neg(A \rightarrow B)}{\Gamma, \neg\neg B}$$

- Показываем, что тот же самый вывод верен в ИИВ: отброшенная аксиома $A \vee \neg A$ превращается в верную формулу ИИВ $\neg\neg(A \vee \neg A)$. ■

Плиско В. Е., Хаханян В. Х. Интуиционистская логика. — М.:
Изд-во при мех.-мат. ф-те МГУ, 2009.