Дискретная вероятность

1.1. Предположим, что вы участвуете в игре, в которой вам предлагают выбрать одну из трех дверей; за одной из этих дверей находится какой-то приз, за двумя другими приза нет. Пусть вы выбрали одну из дверей, скажем, первую дверь. Ведущий игры, не открывая этой двери и зная, что расположено за ней, открывает еще одну дверь дверь, за которой приза нет (пусть это будет, для определенности, вторая дверь), а затем предлагает вам изменить свое решение, выбрав третью дверь. Имеет ли вам смысл изменить свое решение?

1.2. Подсчитайте мощность пространства Ω элементарных событий для следующего случайного эксперимента: вначале производится выстрел по мишени, описанной в предыдущем утверждении, а затем игральная кость бросается столько раз, сколько очков выбито на мишени.

1.3. Рассмотрим лотерею “пять из тридцати шести”, победителем которой является человек, правильно угадавший пять из тридцати шести чисел $1, 2, \ldots, 36$. Набор из пяти чисел считается неупорядоченным. Определите вероятность того, что произвольно выбранные пять чисел выиграют.

1.4. Вычислите вероятность того, что при игре в лотерею “пять из тридцати шести” в произвольно выбранном наборе из пяти чисел хотя бы одно будет правильным.

1.5. В программе экзамена 75 вопросов. Студент выучил 50 из них. В билете три вопроса. Какова вероятность того, что в вытянутом студентом билете будет хотя бы два вопроса, известных студенту?

1.6. Из двух мешков для лото, содержащих бочонки с числами от 1 до 90, достают по бочонку. Зависимы ли события A и B, если A есть выпадение чётной суммы, B — выпадение суммы, большей 140?

1.7. В понедельник, после двух выходных, токарь Василий вытачивает левовинтовые шурупы вместо требуемых правовинтовых с вероятностью 0.5. Во вторник этот показатель снижается до 0.2. В остальные дни недели Василий ударно трудится, и процент брака среди изготавливаемых им шурупов составляет 10%. При проверке недельной партии шурупов, выточенных Василием, случайно выбранный шуруп оказался дефектным. Какова вероятность того, что шуруп изготовлен в понедельник, если известно, что в понедельник он вытачивает в два раза меньше шурупов, чем в каждый из остальных рабочих дней?

1.8. Из десяти стрелков пять попадают в цель с вероятностью, равной 80%, три - с вероятностью, равной 50%, и два – с вероятностью 90%. Наудачу выбранный стрелок произвел выстрел, поразив цель. К какой из групп вероятнее всего принадлежал этот стрелок?

1.9. Отрезок разделен на четыре части в отношении $1 : 2 : 3 : 4$. На отрезок наудачу нанесли 8 точек. Найдите вероятность того, что на каждую из четырех частей отрезка попадет по две точки.

1.10. Костя Сидоров любит ходить в тир пострелять. Его рекорд в серии из пяти выстрелов составляет 47 очков. Какова вероятность повторить рекорд, если в среднем он попадает в десятку в 30% случаев, в девятку — в 40%, в восьмерку — в 20%, в семерку — в 5%, а оставшиеся 5% приходятся на диапазон 0–6?

1.11. Два равносильных шахматиста играют в матч из n результативных партий. Ничьи во внимание не принимаются. Что вероятнее: а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех? б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти?

1.12. Предположим, что у нас имеются три монетки, две из которых правильные, а третья является несимметричной, вероятность выпадения орла у которой $p = 1/3$. Мы случайным образом выбираем из этих трех монеток одну и подбрасываем ее пять раз. В результате такого эксперимента у нас один раз выпадает орел и четыре раза решка. Какая монетка была выбрана с большей вероятностью — идеальная или несимметричная?

1.13. Несимметричную монетку бросают до тех пор, пока не выпадет орел. Найдите вероятность того, что это случилось на втором бросании, если известно, что для этого потребовалось четное число бросаний.

1.14. Производитель конфет M&M's периодически меняет цвета своих конфет в упаковке. До 1995 года в одной упаковке конфет M&M's содержалось 30 процентов коричневых, 20 желтых, 20 красных, 10 оранжевых, 10 зеленых, 10 желто-коричневых конфет. В 1995 году производитель добавил в набор синие конфеты и изменил распределение конфет в наборе. Именно, после 1995 года в стандартном наборе конфет содержалось 24 процентов синих, 20 зеленых, 16 оранжевых, 14 желтых, 13 красных и 13 коричневых конфет. Предположим, что вам дают по одной конфете из двух разных упаковок, одной — 1994 года, второй — 1996 года выпуска, но не говорят, какая конфета взята из какой упаковки. Пусть вам досталась одна желтая и одна зеленая конфета. Какова вероятность того, что желтая конфета оказалась из упаковки 1994 года?

1.15. По статистике, 30% из общего количества студентов, которым читается данный курс, сдают экзамен с первой попытки и в срок, 50% с первой попытки его не сдают, но успевают пересдать экзамен в течение основной сессии, а оставшиеся 20% либо вовсе экзамен не сдают, либо сдают его в допсессию. Известно, что среди студентов первой группы 95% успешно заканчивают свое обучение в университете, среди студентов второй группы эта величина составляет 60%, а среди тех, кто в основную сессию данный курс не сдал, доля получивших в итоге диплом составляет 20%. Определите процент студентов, успешно защищающих диплом, по отношению к общему числу поступивших студентов.

1.16. Предположим, что тест на наркотики дает 99% истинно положительных результатов для людей, употребляющих наркотики, и 98.5% истинно отрицательных результатов для людей, наркотики не употребляющих. Предположим, что в мире существует $0,5\%$ наркоманов. Предположим, что произвольно выбранный тест показал положительный результат на употребление наркотиков. Какова вероятность того, что человек, сдавший тест, действительно является наркоманом?

1.17. Даны натуральные числа m и n, причем $m < n$. Из чисел $1, 2, \ldots, n$ последовательно выбирают наугад два различных числа. Найдите вероятность того, что разность между первым выбранным числом и вторым будет больше или равна m.