1 Графы

1.1. Докажите, что в любом простом графе, построенном на $n \geqslant 2$ вершинах, существуют по крайней мере две вершины с одинаковыми степенями. Остается ли верным это утверждение для мультиграфа? Для графа без петель?

1.2. Докажите, что кубический граф, т. е. граф, степени всех вершин которого равны трем, всегда имеет четное число вершин.

1.3. Пусть G — простой граф, построенный на 9 вершинах. Предположим, что сумма степеней вершин графа G больше или равна 27. Правда ли, что в таком графе обязательно существует вершина, степень которой больше или равна 4?

1.4. Докажите, что граф Q_k (т. е. k-куб) действительно является k-регулярным двудольным графом. Подсчитайте количество вершин и ребер в таком графе. Сколько различных копий P_3 и C_4 содержит такой граф?

1.5. Последовательностью степеней вершин графа или степенной последовательностью (degree sequence) называется список всех степеней вершин графа G, записанный в порядке невозрастания:

$$\deg(x_1) \geqslant \deg(x_2) \geqslant \ldots \geqslant \deg(x_n).$$

Докажите, что невозрастающая последовательность $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ целых неотрицательных чисел является степенной последовательностью некоторого мультиграфа G тогда и только тогда, когда сумма всех этих чисел есть четное число.

1.6. Рассмотрим последовательность $\mathbf{d_1} := (3, 3, 3, 3, 3, 2, 2, 1)$. Удалим в ней число 3, стоящее на первой позиции, а от следущих трех чисел отнимем по единице. В результате получим последовательность $\mathbf{d_2} := (2, 2, 2, 3, 2, 2, 1)$, которая после переупорядочивания по невозрастанию примет вид $(3, 2, 2, 2, 2, 2, 1)$. В общем случае соответствующая пара последовательностей будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{lcllllllll} \mathbf{d_1} & := & (s, & d_1, & d_2, & \ldots, & d_s, & d_{s+1}, & \ldots, & d_n), \\ \mathbf{d_2} & := & & (d_1 - 1, & d_2 - 1, & \ldots, & d_s - 1, & d_{s+1}, & \ldots, & d_n). \end{array}$$

Докажите, что последовательность $\mathbf{d_1}$ является графовой тогда и только тогда, когда таковой является и последовательность $\mathbf{d_2}$. Сформулируйте на основании данного утверждения алгоритм проверки на графовость для невозрастающей числовой последовательности.

1.7. Какие из представленных ниже числовых последовательностей являются графовыми:

1) $(5, 5, 4, 3, 2, 2, 2, 1)$;
2) $(5, 5, 4, 4, 2, 2, 1, 1)$;
3) $(5, 5, 5, 3, 2, 2, 1, 1)$;
4) $(5, 5, 5, 4, 2, 1, 1, 1)$?

1.8. Пусть M_a — матрица смежности простого графа G. Выразите через нее матрицу $\overline{M}_a$ смежности графа $\overline{G}$.

1.9. Сколько различных ориентированных графов можно получить из одного и того же простого графа G, $|E(G)| = m$, ориентацией его ребер?

1.10. Доказать, что для произвольного турнира T справедливо равенство

$$\sum_{x \in V(T)} \operatorname{outdeg}(x)^2 = \sum_{x \in V(T)} \operatorname{indeg}(x)^2.$$

1.11. Орграф D называется сбалансированным, если для любой вершины $x \in V(D)$ выполняется неравенство

$$|\operatorname{outdeg}(x) - \operatorname{indeg}(x)| \leqslant 1.$$

Доказать, что из любого неориентированного графа G можно получить направленный сбалансированный орграф D.

1.12. Пусть M_a и M_i — матрицы смежности и инцидентности простого графа G. Чему равны диагональные коэффициенты матриц M_a^2 и $M_i M_i^t$, где M_i^t — транспонированная к M_i матрица? Как связаны недиагональные элементы матриц $M_i M_i^t$ и M_a?

1.13. Любой элемент $a_{i,j}$ матрицы M_a смежности графа G можно трактовать как количество путей длины 1 в графе G из вершины i в вершину j. Чему равны с этой точки зрения элементы матрицы M_a^2? Можно ли обобщить данный результат на случай произвольной степени $k > 1$ матрицы M_a?

1.14. Неубывающая последовательность чисел

$$\mathbf{s_1} := (s_1, s_2, \ldots, s_n) : \qquad s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_n \leqslant n-1 \tag{1}$$

называется последовательностью количества очков (score sequence), если существует турнир T, построенный на n вершинах, для которого $\operatorname{outdeg}(x_i) = s_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Доказать, что невозрастающая последовательность (1) является последовательностью количества очков тогда и только тогда, когда последовательностью количества очков оказывается последовательность $\mathbf{s_2}$, полученная из последовательности

$$(s_1, s_2, \ldots, s_{s_n}, s_{s_n+1} - 1, \ldots, s_{n-1} - 1)$$

переупорядочиванием ее членов в порядке неубывания (определение).

1.15. Доказать, что для любой последовательности (1) количества очков справедливы неравенства

$$\sum_{i=1}^{k} s_i \geqslant \binom{k}{2}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1; \qquad \sum_{i=1}^{n} s_i = \binom{n}{2}. \tag{2}$$

(определение).

1.16. Доказать, что условия (2) являются не только необходимыми, но и достаточными условиями для того, чтобы неубывающая последовательность (1) была последовательностью количества очков.