Урновые схемы, числа Стирлинга.

1. Сколько существует пятизначных чисел в восьмиричной системе исчисления, в которых все три цифры различны?

   Решение:

   Всего 8 цифр, на первом месте одна из 7, на втором также одна из 7, на третьем одна из 6 и так далее. Всего: $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4$

2. Найдите количество девятизначных чисел, в которых каждая цифра от 1 до 9 встречается ровно один раз, цифры $1, 2, 3, 4, 5$ расположены в порядке возрастания, а цифра 6 стоит раньше цифры 1.

   Решение:

   По сути дела, мы имеем число, в котором цифры $6, 1, 2, 3, 4, 5$ упорядочены и идут по порядку слева направо. Остальные три цифры $7, 8, 9$ могут быть расположены на любых позициях. Иными словами, мы получили задачу о раскладке трех различимых предметов по семи различимым ящикам при условии, что порядок раскладки предметов в каждом ящике важен. Количество таких раскладок равно $7 \cdot 8 \cdot 9 = 504$. Действительно, первую цифру мы можем расположить на любую из семи позиций. Следующую цифру мы можем расположить на любой из восьми позиций. Наконец, последнюю цифру мы можем разместить на любой из 9 позиций.

3. Трое мужчин и две женщины выбирают себе место работы. В городе имеются три фирмы, в которых требуются только мужчины, две — в которых требуются только женщины, и две — в которых берут и мужчин, и женщин. Сколькими способами они могут выбрать себе место работы?

   Решение:

   Каждый из трёх мужчин выбирает одну фирму из пяти, и каждый возможный способ выбора кодируется строкой из трёх букв над алфавитом из пяти символов. Аналогично, выбор женщин кодируется строкой из двух символов над алфавитом из четырёх символов. По правилу произведения, общее число способов равно $5^3 \cdot 4^2$.

4. Чему равно количество способов раскладки n различимых предметов по k неразличимым ящикам при условии, что в каждом ящике находится не более одного предмета

   Решение:

   Если такая расстановка есть $(k \geq n)$, то она единственная, ведь нам не важно в какой именно ящик положить предмет.

5. Синий игрок построил k перерабатывающих завода. Сколькими способами он может распределить n рабочих между ними?

   Решение:

   $\binom{n+k-1}{k-1}$ — количество способов разбить n на k слагаемых.

6. Докажите равенство

   $$n = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^k} \binom{n+1}{k+1}.$$

   Решение:

Воспользуемся основным тождеством для биномиальных коэффициентов:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Подставляя это выражение в доказываемое нами равенство, получим

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^k} \binom{n+1}{k+1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^k} \binom{n}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^k} \binom{n}{k+1}.$$

С учетом результатов предыдущей пары первая сумма в правой части равна $(1+1/n)^{n-1}$. Вторую же сумму в правой части мы можем переписать так:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^k} \binom{n}{k+1} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^{k+1}} \binom{n}{k+1} = n \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{n^k} \binom{n}{k+1} - n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^k} \binom{n}{k+1} =$$

$$= n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1} - 1\right] - n\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} - 2\right] = n - \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

7. Дайте комбинаторное доказательство тождества

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k = 4^n.$$

Решение:

Правую часть тождества можно интерпретировать как количество строк над алфавитом из четырех букв. Левая часть подсчитывает аналогичное количество следующим образом: вначале мы $\binom{n}{k}$ способами выбираем k позиций в строке, размещаем на эти позиции первую букву нашего алфавита, а затем 3^k способами на оставшиеся позиции помещаем символы из алфавита, состоящего из оставшихся трех букв.

8. Докажите

$$k^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \hat{S}(n,i)$$

Решение:

Действительно, в случае $n \geq k$ имеем

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \hat{S}(n,i) + \sum_{i=k+1}^{n} \binom{k}{i} \cdot \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \hat{S}(n,i)$$

за счет того, что биномиальные коэффициенты $\binom{k}{i} = 0$ для всех $i > k$. В случае же $n < k$

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \cdot \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \hat{S}(n,i) + \sum_{i=n+1}^{k} \binom{k}{i} \cdot \hat{S}(n,i) = \sum_{i=0}^{n} \binom{k}{i} \cdot \hat{S}(n,i)$$

уже за счет того, что при $i > n$ все числа $\hat{S}(n,i) = 0$.