ДЗ5, Теория вероятностей

1. Подсчитайте мощность пространства Ω элементарных событий для следующего случайного эксперимента: вначале производится выстрел по мишени, описанной в первом задании из практики, а затем игральная кость бросается столько раз, сколько очков выбито на мишени.

   Решение

   В случае попадания мимо мишени кубик не кидается (единственный исход), в случае выбивания на мишени числа k, $k = 1, \dots, 10$ мы имеем 6^k элементарных исходов. Тогда

   $$|\Omega| = \sum_{k=0}^{10} 6^k = \frac{1 - 6^{11}}{1 - 6} = 72559411.$$

2. В урне лежат 8 черных и 5 белых шаров. Из урны одновременно извлекаются два шара. Найти вероятность того, что извлеченные шары а) одного цвета; б) разных цветов.

   Решение

   Общее количество элементарных исходов равно количеству $\binom{8+5}{2}$ двуэлементных подмножеств $8 + 5 = 13$-элементного множества. Количество благоприятных исходов для события A, состоящего в том, что мы вытащили два шара одинакового цвета, равно сумме $\binom{8}{2} + \binom{5}{2}$, то есть количеству двуэлементных подмножеств 8-элементного множества черных шаров и количеству двуэлементных подмножеств 5-элементного множества белых шаров. Как следствие, вероятность наступления события A равна

   $$\Pr(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{7 \cdot 4 + 5 \cdot 2}{13 \cdot 6} = \frac{38}{78} = \frac{19}{39}.$$

   Заметим теперь, что событие B, состоящее в том, что мы вытащили два шара разного цвета, образует вместе с событием A полный набор несовместных событий. Следовательно

   $$\Pr(B) = 1 - \Pr(A) = \frac{20}{39}.$$

3. Из колоды в 52 карты случайным образом выбирают 6 карт. Какова вероятность того, что среди выбранных карт имеются по три карты двух разных мастей? А вероятность того, что среди выбранных карт имеется не более двух карт бубновой масти?

   Решение

   Общее количество элементарных исходов в данной задаче равно $\binom{52}{6} = 20358520$. При этом в первом случае благоприятные исходы подсчитываются так: мы $\binom{4}{2}$ числом способов выбираем две масти, а затем $\binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3}$ количеством способов выбираем по три карты одной масти. Вероятность такого события A равна

   $$\Pr(A) = \frac{\binom{4}{2} \cdot \binom{13}{3} \cdot \binom{13}{3}}{\binom{52}{6}} = \frac{490776}{20358520}.$$

   Количество благоприятных исходов во втором случае есть сумма количества $\binom{39}{6}$ способов выбрать все шесть карт, масти которых отличны от бубен, плюс количество $\binom{39}{5} \cdot \binom{13}{1}$ способов выбрать ровно одну карту бубен, плюс количество $\binom{39}{4} \cdot \binom{13}{2}$ способов выбрать ровно две карты бубет. Как следствие, вероятность такого события B равна

   $$\Pr(B) = \frac{\binom{39}{6} + \binom{39}{5} \cdot \binom{13}{1} + \binom{39}{4} \cdot \binom{13}{2}}{\binom{52}{6}} = \frac{17163042}{20358520}.$$

4. Дано натуральное число $n < 52$. Из тщательно перемешанной колоды в 52 карты одновременно были взяты n карт. На одну из этих n карт посмотрели, она оказалась тузом. После этого она возвращается в набор взятых карт, а затем эти выбранные на первом шаге n карт снова тщательно перемешиваются. После этого из них выбирается одна карта и открывается. Найдите вероятность того, что открытая карта является тузом.

   Решение

   Обозначим через B событие, состоящее в том, что мы во второй раз вытащили туза. Это может быть либо тот же самый туз, которого мы вытащили на первом шаге (событие A), либо какой-то другая карта (событие $\bar{A}$). Ясно, что вероятность $\Pr(A) = 1/n$. Как следствие, $\Pr(\bar{A}) = 1 - \Pr(A) = (n-1)/n$. По формуле полной вероятности,

$$\Pr(B) = \Pr(B|A) \cdot \Pr(A) + \Pr(B|\bar{A}) \cdot \Pr(\bar{A}).$$

   Очевидно, что $\Pr(B|A) = 1$. Осталось сосчитать условную вероятность $\Pr(B|\bar{A})$ события, состоящего в том, что мы вытащили из оставшихся $n-1$ карт туза. Но сами эти $n-1$ карт мы до этого совершенно произвольно вытащили из набора в $52 - 1 = 51$ карт (туз, вытащенный на первом шаге, в набор уже не попадает). Иными словами, это все равно, как если бы мы вытащили туза из первоначального набора в 51 карту. Тузов в этом наборе осталось 3, так что $\Pr(B|\bar{A}) = 3/51 = 1/17$. Подводя итоги, получаем, что

$$\Pr(B) = \frac{1}{n} + \frac{1}{17} \cdot \frac{n-1}{n}.$$

5. В понедельник, после двух выходных, токарь Василий вытачивает левовинтовые шурупы вместо требуемых правовинтовых с вероятностью 0.5. Во вторник этот показатель снижается до 0.2. В остальные дни недели Василий ударно трудится, и процент брака среди изготавливаемых им шурупов составляет 10%. При проверке недельной партии шурупов, выточенных Василием, случайно выбранный шуруп оказался дефектным. Какова вероятность того, что шуруп изготовлен в понедельник, если известно, что в понедельник он вытачивает в два раза меньше шурупов, чем в каждый из остальных рабочих дней?

   Решение

   Пусть A_i, $i = 1, \ldots, 5$, — случайное событие, состоящее в том, что в недельной партии выбрана деталь, сделанная в i-й день. Из условия задачи известно, что $\Pr(A_i) = 2\Pr(A_1)$ для всех $i = 2, \ldots, 5$. Обозначим через B событие, состоящее в том, что при недельной проверке случайно выбранная деталь оказалась бракованной. Из условия задачи следует, что $\Pr(B|A_1) = 0.5$, $\Pr(B|A_2) = 0.2$, а $\Pr(B|A_i) = 0.1$ для $i = 3, 4, 5$. Следовательно, по формуле (**??**) получаем

$$\Pr(A_1|B) = \frac{\Pr(A_1) \cdot \Pr(B|A_1)}{\sum_{i=1}^{5} \Pr(A_i) \cdot \Pr(B|A_i)} = \frac{0.5}{0.5 + 2 \cdot (0.2 + 3 \cdot 0.1)} = \frac{1}{3}.$$

6. Несимметричную монетку бросают до тех пор, пока не выпадет орел. Найдите вероятность того, что это случилось на втором бросании, если известно, что для этого потребовалось четное число бросаний.

   Решение

   Обозначим через B событие, состоящее в том, что на втором бросании выпал орел, а через A — событие, состоящее в том, что орел выпал на одном из четных бросаний. Ясно, что вероятность $\Pr(B) = q \cdot p$. Далее, вероятность события A рассчитывается так:

$$\Pr(A) = q \cdot p + q^3 \cdot p + \ldots + q^{2n+1} \cdot p = \frac{q \cdot p}{1 - q^2}.$$

Наконец, так как в данной задаче $B \subset A$, вероятность $\Pr(B \cap A) = \Pr(B)$. Теперь остается воспользоваться формулой и получить, что

$$\Pr(B|A) = \frac{q \cdot p}{(q \cdot p)/(1 - q^2)} = 1 - q^2.$$

7. Рассмотрим схему Бернулли из n испытаний, в которой вероятность p успеха является иррациональным числом. Найдите, при каком k, $k = 1, 2, \dots, n$, величина $\Pr(A_k)$ будет наибольшей.

   Решение

   Пусть k выбрано таким образом, что величина $\Pr(A_k)$ является наибольшей. Сравним значения $\Pr(A_k)$ с вероятностями соседних событий A_{k-1} и A_{k+1}. Из условия $\Pr(A_k) = \max_i \Pr(A_i)$ следует, что

   $$\Pr(A_k) \geq \Pr(A_{k+1}) \text{и} \Pr(A_k) \geq \Pr(A_{k-1}).$$

   С учетом формулы (**??**) последние неравенства можно переписать так:

   $$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \geq \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1},$$

   $$\frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \geq \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} p^{k-1} (1-p)^{n-k+1}.$$

   После упрощений получаем неравенства

   $$\frac{1-p}{n-k} \geq \frac{p}{k+1}, \qquad \frac{p}{k} \geq \frac{1-p}{n-k+1} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} np + p \leq k + 1, \\ np + p \geq k. \end{cases}$$

   С учетом иррациональности p отсюда получается следующее выражение для параметра k:

   $$k = \lfloor p \cdot (n+1) \rfloor.$$

8. Костя Сидоров любит ходить в тир пострелять. Его рекорд в серии из пяти выстрелов составляет 47 очков. Какова вероятность повторить рекорд, если в среднем он попадает в десятку в 30% случаев, в девятку — в 40%, в восьмерку — в 20%, в семерку — в 5%, а оставшиеся 5% приходятся на диапазон 0–6?

   Решение

   Набрать 47 очков можно следующими тремя способами:

   $$10 + 10 + 10 + 10 + 7, 10 + 10 + 10 + 9 + 8, 10 + 10 + 9 + 9 + 9.$$

   Обозначим через A_i, $i = 1, 2, 3$, соответствующие этим способам случайные события. Вероятность этих событий рассчитывается по формуле () и равна

   $$\Pr(A_1) = \frac{5!}{4!\,1!} \cdot 0.3^4 \cdot 0.05^1 = 0.002025, \Pr(A_2) = \frac{5!}{3!\,1!\,1!} \cdot 0.3^3 \cdot 0.4^1 \cdot 0.2^1 = 0.0432,$$

   $$\Pr(A_3) = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot 0.3^2 \cdot 0.4^3 = 0.0576.$$

   Суммируя эти вероятности, получаем, что вероятность повторить рекорд равна 0.102825.