1. Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, 2^\Omega, \mathsf{P})$, в котором $\Omega = \{a, b, c\}$, $\mathsf{P}(a) = \frac{1}{2}$, $\mathsf{P}(b) = \mathsf{P}(c) = \frac{1}{4}$. Определим на Ω случайную величину X: $X(a) = 1$, $X(b) = X(c) = 2$.

   Для $\mathfrak{A}_1 = \{\varnothing, \{a\}, \{b, c\}, \Omega\}$ и $\mathfrak{A}_2 = \{\varnothing, \{a, b\}, \{c\}, \Omega\}$ вычислите условные математические ожидания $\mathsf{E}(X|\mathfrak{A}_1)$ и $\mathsf{E}(X|\mathfrak{A}_2)$.

2. Пусть X_t — авторегрессионный процесс первого порядка: $X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t$ при $t \in \mathbb{N}$, $X_0 = 0$, где ε_t — белый шум, а параметр $\alpha \in [-1; 1]$.

   (a) Вычислите условные математические ожидания $\mathsf{E}(X_{t+1}|X_0, \ldots, X_t)$ и $\mathsf{E}(X_{t+2}|X_0, \ldots, X_t)$.

   (b) Обобщите результат предыдущего пункта на произвольный момент времени в будущем $t + k$, $k \in \mathbb{N}$.

3. Пусть X и Y — случайные величины с конечной дисперсией. Докажите, что случайные величины X и $Y - \mathsf{E}(Y|X)$ некоррелированы.

4. Пусть X, Y — случайные величины с конечной дисперсией на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathsf{P})$ и $\mathfrak{C} \subset \mathfrak{A}$ — σ-подалгебра σ-алгебры $\mathfrak{A}$.

   Докажите, что для условной ковариации

   $$\operatorname{cov}(X, Y|\mathfrak{C}) = \mathsf{E}\left((X - \mathsf{E}(X|\mathfrak{C}))(Y - \mathsf{E}(Y|\mathfrak{C}))|\mathfrak{C}\right)$$

   верно равенство

   $$\operatorname{cov}(X, Y|\mathfrak{C}) = \mathsf{E}(XY|\mathfrak{C}) - \mathsf{E}(X|\mathfrak{C})\mathsf{E}(Y|\mathfrak{C}).$$

5. Пусть X_t — случайное блуждание, то есть $X_t = X_{t-1} + \varepsilon_t$, где ε_t — белый шум и $X_0 = 0$. Вычислите $\mathsf{E}(X_{t+k}|X_0, \ldots, X_t)$ при $t, k \in \mathbb{N}$.

6. Пусть X_n — случайная последовательность, согласованная с фильтрацией $\mathfrak{F}_n$, и при всех t верно равенство $\mathsf{E}(X_{t+1}|\mathfrak{F}_t) = X_t$. Докажите, что при всех $n \in \mathbb{N}$ верно равенство $\mathsf{E}(X_{t+n}|\mathfrak{F}_t) = X_t$.

7. Пусть X_n — биномиальный процесс с $u = d = 1$ и $X_0 = 0$. Рассмотрим $Y_n = \left(\frac{1-p}{p}\right)^{X_n}$. Докажите, что Y_n — мартингал.