Производная, монотонность, выпуклость

1. $f'(x) = x^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$
$f'(x) = 0$ при $x = e$ — единственный подозрительный кандидат на экстремум
При этом, при $x < e$: $f'(x) > 0$ и при $x > e$: $f'(x) < 0$
Следовательно это максимум, еще и глобальный

2. Докажем неравенства
a) $e^x > ex, x > 1$?
$g(x) = e^x - ex, g'(x) = e^x - e$
$g(1) = 0, g'(x) > 0$ при $x > 1$
$\Rightarrow g(x) > 0$ при $x > 1$

b) $y \sin x > x \sin y, 0 < x < y < \pi$?
$g(x) = \frac{\sin x}{x}$
$g'(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$
При $x \in (0, \pi), g'(x) < 0$
Так, как при $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ можно воспользоваться неравенством $x < \tan x$
А при $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ неравенство очевидно $(\cos x < 0, \sin x > 0)$
Следовательно функция строго монотонно убывает
$x < y \Rightarrow \frac{\sin x}{x} > \frac{\sin y}{y}$

c) $e^{\frac{x+y}{2}} < \frac{e^x + e^y}{2}, x \neq y$?
e^x — выпуклая функция, так как $(e^x)'' = e^x > 0 \forall x$
Воспользуемся определением выпуклости, подставим в него $\lambda = \frac{1}{2}$ и получим в точности требуемое неравенство

3. Сравните e^π и π^e
Одно из возможных решений:
В первом номере мы показали, что $x^{\frac{1}{x}}$ имеет глобальный максимум при $x = e$
Следовательно $e^{\frac{1}{e}} > \pi^{\frac{1}{\pi}}$
Возведем неравенство в степень $e \cdot \pi$ и получим $e^\pi > \pi^e$

4. Найдите интервалы выпуклости и точки перегиба функции:
a) $f(x) = \frac{x^2}{(x-2)^3}$
$f''(x) = \frac{2(x^2+8x+4)}{(x-2)^5}$
В точках $x = -2(2+\sqrt{3}), x = 2(\sqrt{3}-2), x = 2$ вторая производная меняет знак

b) $f(x) = \frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$
$f''(x) = \frac{3(x-5)}{4x^{\frac{7}{2}}}$, при $x > 1$
$f''(x) = \frac{-3(x-5)}{4x^{\frac{7}{2}}}$, при $x < 1$
В точках $x = 1, x = 5$, вторая производная меняет знак

5. Для произвольного набора $x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}$ докажите:

$$\ln\left(1 + e^{\sum \frac{x_i}{n}}\right) \leqslant \frac{\sum \ln(1 + e^{x_i})}{n}$$

Неравенство Йенсена для функции $f(x) = \ln(1 + e^x)$ с коэффициентами $\lambda_i = \frac{1}{n}$ дает в точности нужное неравенство

Требуется только показать выпуклость $f(x)$

$f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$

Интегралы

1. Вычислите:

Простые преобразования:

a) $\int \frac{x}{1+x}dx = \int(1 - \frac{1}{1+x})dx = x - \ln|1+x| + C$

b) $\int \frac{2}{1-x^2}dx = \int(\frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x})dx =_{\{t=1+x, u=1-x\}} - \int \frac{1}{u}du + \int \frac{1}{t}dt = \ln|1+x| - \ln|1-x| + C$

c) $\int \sin^2 x dx = \int \frac{1-\cos 2x}{2}dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + C$

Замены:

d) $\int \frac{x^7}{\sqrt{1-x^{16}}}dx =_{\{t=x^8\}} \frac{1}{8}\int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}dt =_{\{\varphi=\sin t\}} \frac{1}{8}\int \frac{\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}}d\varphi = \frac{1}{8}\varphi + C = \frac{1}{8}\arcsin x^8 + C$

e) $\int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x dx = -\frac{1}{4}\cos 2x + C$

$\int \sin x \cos x dx =_{\{t=\sin x\}} \int t dt = \frac{1}{2}\sin^2 x + C$

f) $\int \frac{1}{x \ln x}dx =_{\{t=\ln x\}} \int \frac{1}{t}dt = \ln t + C = \ln\ln x + C$

По частям:

g) $\int \ln x dx = x\ln x - \int x d\ln x = x \ln x - \int 1 dx = x\ln x - x + C$

h) $\int xe^x dx = \int x de^x = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми $y(x) = e^x, y(x) = x^e, x = 0$

Рассуждениями как при сравнении e^π и π^e из этой практики можно получить $e^x > x^e$ при $x \neq e$

Графики касаются при $x = e$. И теперь можно примерно понять как это выглядит **тут могла бы быть (ваша) картинка**

Искомую площадь выразим как разность площадей подграфика e^x и x^e

А площаль подграфика, это определенный интеграл

$S = \int\limits_0^e e^x dx - \int\limits_0^e x^e dx = e^x\Big|_0^e - \frac{x^{e+1}}{e+1}\Big|_0^e = e^e - 1 - \frac{e^{e+1}}{e+1}$