3 Упражнения на k-связные графы

3.1. Пусть G есть вершинно двусвязный граф, и пусть вершины x и y этого графа соединены в G путем P. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: в графе G найдется путь Q, соединяющий x и y и не пересекающийся с P ни в каких внутренних вершинах этого пути.

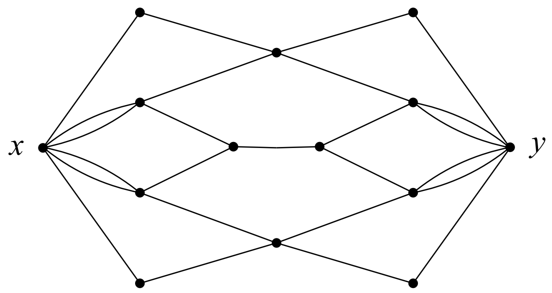


Рис. 1

3.2. Определить размер $\kappa(x, y)$ вершинного и $\lambda(x, y)$ реберного разделяющих x и y множеств для графа G, показанного на рис.1.

3.3. Пусть D есть орграф, построенный на множестве вершин $[12] = \{1, 2, \ldots, 12\}$, в котором из i в j проведено ребро тогда и только тогда, когда i делит j. Определить $\kappa(1, 12)$ и $\lambda(1, 12)$ в таком графе.

3.4. Пусть G вершинно k-связен. Образуем из G новый граф G' путём добавления к G новой вершины y и не менее k рёбер из y в k различных вершин графа G. Доказать, что G' также k-связен.

3.5. Назовем k-веером из вершины x в множество Y набор из k путей, начинающихся в x, заканчивающихся в Y, и не имеющих никаких общих вершин, кроме вершины x. Пусть G есть k-связный граф, x — некоторая его вершина, а Y — набор из не менее чем k вершин графа G, не включающий x. Доказать, что тогда существует k-веер из x в Y.

3.6. Доказать, что в k-связном графе для любых k вершин найдется цикл C, на котором лежат все эти k вершин.

3.7. Показать, что в условиях предыдущего упражнения мы не можем заранее задать порядок, в котором должны проходиться вершины, лежащие на общем для них цикле C.

3.8. Чему равно максимальное количество рёберно непересекающихся простых путей, соединяющих любую пару вершин в полном графе K_n?

3.9. Возьмем некоторую сеть из n вершин. В каждой её вершине, за исключением стока и истока, добавим петлю с пропускной способностью 1, поменяем местами сток и исток, а потом каждое ребро (x, y) заменим на ребро (y, x) с той же пропускной способностью. Как изменится величина максимального потока в такой сети?

3.10. Для сети, изображенной на рис.2, определить минимальный реберный разрез, а также предъявить максимальный поток в этой сети.

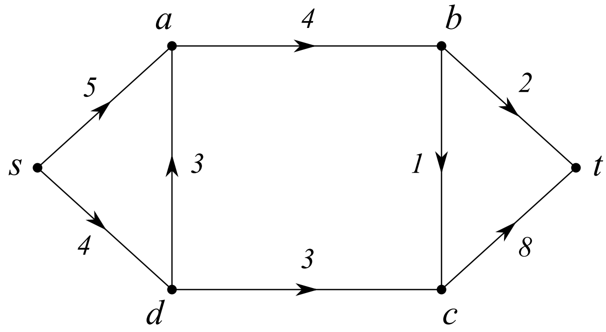


Рис. 2

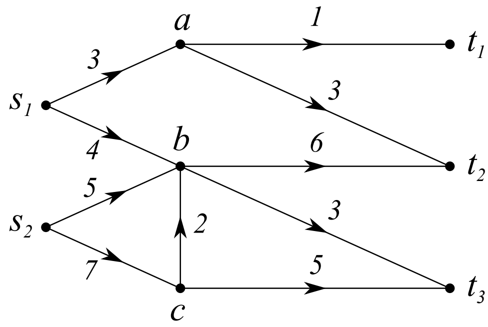


Рис. 3

3.11. Как использовать алгоритм Форда-Фалкерсона для сети, в которой имеется несколько источников и/или стоков? Проиллюстрировать ответ на примере сети, показанной на рис.3. Определить для этой сети минимальный разрез и соответствующий ему максимальный поток.

3.12. Рассмотрим сеть, изображенную на рис.4. Величина пропускной способности ребра (x_4, x_3) равна $r = (\sqrt{5}-1)/2$ и удовлетворяет уравнению вида $r^2 = 1-r$. Будем искать максимальный поток в этой сети алгоритмом Форда-Фалкерсона. В качестве первого увеличивающего поток пути возьмём путь (s, x_2, x_3, t). Затем будем увеличивать поток вдоль путей в следующем порядке: $p_1, p_2, p_1, p_3, p_1, p_2, p_1, p_3, \ldots$, где $p_1 = (s, x_4, x_3, x_2, x_1, t)$, $p_2 = (s, x_2, x_3, x_4, t)$, $p_3 = (s, x_1, x_2, x_3, t)$. Показать, что при стремлении количества n итераций к бесконечности величина потока не будет стремится к величине максимального потока в этой сети.

3.13. С помощью алгоритма, использованного при доказательстве теоремы Форда-Фалкерсона, доказать, что в случае целочисленных значений пропускных способностей ребер существует максимальный поток в сети, причем величина этого потока, равно как и значения потока на каждом из ребер, будут целочисленными. Показать, что любой такой максимальный поток можно разбить на потоки, состоящие из простых путей из s в t, величина каждого из которых равна единице.

3.14. Для формирования ученого совета университета необходимо выбрать одного преподавателя от каждой из k университетских кафедр, k — натуральное число, делящееся на три. Один и тот же преподаватель может быть приписан к одной или нескольких кафедр, но может быть выбран в ученый совет только от одной из них. На кафедре работают профессора, доценты и ассистенты. В ученый совет должно входить одинаковое количество преподавателей от каждой из этих трех групп. Описать алгоритм выбора преподавателей в ученый совет.

3.15. Подсчитать количество совершенных паросочетаний в полном двудольном графе $K_{n,n}$. Как изменится ответ для графа $K_{n,n}$, в котором удалили ребра, входящие в одно из совершенных паросочетаний?

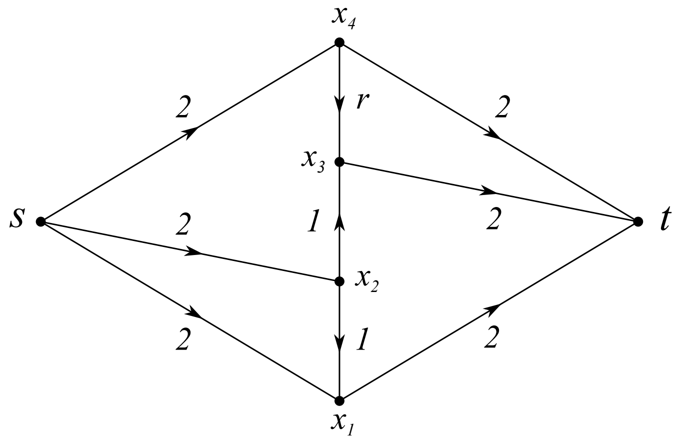
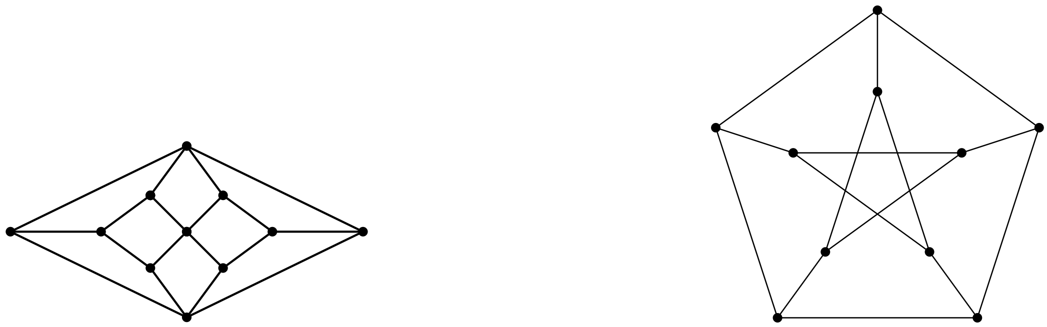


Рис. 4

3.16. Пусть S есть подмножество множества $V(G)$ вершин графа G, покрытое некоторым паросочетанием M. Доказать, что некоторое максимальное паросочетание также покрывает все вершины этого множества. Верно ли, что данный факт будет выполняться для любого максимального паросочетания?

3.17. Пусть M и M' есть два паросочетания в графе G. Описать структуру их симметрической разности $M \Delta M'$. Как изменится эта структура в случае, если паросочетания M и M' максимальны или совершенны?

3.18. Охарактеризовать графы, в которых один из четырех параметров $\alpha(G)$, $\beta(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta'(G)$ равен единице.



(a) (b)

Рис. 5

3.19. Определить числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа Хершеля (рис. 5,a).

3.20. Определить числа $\alpha(G)$, $\alpha'(G)$, $\beta(G)$ и $\beta'(G)$ для графа Петерсена (рис.5,b).