Комбинаторика. Биномиальные коэффициенты.

1.1. Определить сколько решений в натуральных числах имеет уравнение

$$x^7y^2 = 12^{55} \cdot 15^{30}.$$

1.2. На доску размерами 9×9 поставили 15 одинаковых шашек. Сколько существует вариантов расстановки 15 одинаковых шашек на доске размерами 9×9? А сколько из них не являются центрально-симметричными (центрально-симметричная конфигурация — такая, при которой для любой шашки, стоящей в клетке с координатами (i, j), соответствует шашка, расположенная симметрично относительно центральной клетке доски)?

1.3. Сколько существует шестизначных чисел, сумма цифр которых не превосходит 47?

1.4. Докажите комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}. \tag{1}$$

1.5. Докажите комбинаторно следующее тождество:

$$\left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n}{k-i}\!\!\right).$$

С его помощью докажите справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i-1}{n}.$$

1.6. Докажите обобщенное правило суммы для произвольного количества n множеств:

$$|A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n| = \sum_{i=1}^{n}|A_i| - \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}|A_i\cap A_j| + \sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}|A_i\cap A_j\cap A_k| - \ldots + (-1)^{n-1}|A_1\cap A_2\cap\ldots\cap A_n|. \tag{2}$$

Hint: Сколько раз посчитали элемент в сумме справа, если он принадлежит ровно k элементам?

1.7. В классическом домино используются кости, разделенные на две части, каждая из которых содержит от нуля до шести точек. Сколько костей существует в обобщенном домино, в котором любая из частей содержит от нуля до n точек? Сколько существует пар таких костей? Сколькими способами из костей обобщенного домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу?

1.8. В игре нарды 15 белых и 15 черных шашек стоят на 24 полях так, что каждое поле либо пустое, либо занято несколькими белыми шашками, либо занято несколькими черными шашками. Сколькими способами можно так расставить шашки на доске? Наличие знака суммирования допускается.

Задача на дополнительный балл

1.9. Каждая вершина выпуклого n-угольника окрашивается либо в черный, либо в белый цвет. Назовем диагональ разноцветной, если ее концы окрашены в разные цвета. Раскраску вершин назовем правильной, если n-угольник можно разбить на треугольники разноцветными диагоналями, не имеющими общих точек, отличных от вершин. Найдите количество правильных раскрасок.