Числа Стирлинга, числа Белла, ДЗ

1. Найдите количество восьмизначных чисел, произведение цифр каждого из которых равно 3375.

   Решение: Так как $3375 = 3^3 \cdot 5^3 = 3 \cdot 9 \cdot 5^3$, то любое такое число представляет собой либо набор, состоящий из трех троек, трех пятерок и двух единиц, либо набор, состоящий из тройки, девятки, трех пятерок и трех единиц. Следовательно, количество таких чисел равно
$$\frac{8!}{3! \cdot 3! \cdot 2!} + \frac{8!}{1! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 3!} = 1680.$$

2. Докажите, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$, а)[1 балл] по индукции

   б)[2 балла] придумав инъекцию из разбиений множества на подмножества в перестановки.

   Решение: а) В случае $n = 3$ оно верно: $B(3) = 5$, $3! = 6$. Теперь предположим, что оно верно для всех $n \geq 3$ и покажем, что оно остается верным и в случае $n+1$. Для этого воспользуемся рекуррентным соотношением (**??**):
$$B(n+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leq \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(n-k)!} = 1 + n + n(n-1) + \ldots + n! < (n+1)\, n!$$

   b) Пусть у нас есть разбиение на блоки. В каждом блоке упорядочим элементы по возрастанию, а сами блоки упорядочим по убыванию максимальных элементов в них. (Например $(1,5,7)(2,6)(3,4)$). Тогда получим перестановку, в которой промежутки возрастания соответствуют разбиениям на блоки. По промежуткам возрастания блоки восстанавливаются однозначно, поэтому построенное отображение инъективно. Заметим, что не любую перестановку можно получить таким образом, а именно, если в двух соседних промежутках возрастания максимальные элементы тоже возрастают. (Например 135246, промежутки возрастания 135 и 246, но $5 < 6$)

3. Докажите комбинаторно следующую формулу для чисел Стирлинга $S(n,3)$:
$$S(n,3) = \frac{3^n - 3(2^n - 2) - 3}{6}.$$

   Решение: Всего существует 3^n различных отображений n-элементного множества X в трехэлементное множество Y. Из них ровно три отображают X в одноэлементное подмножество, и $3 \cdot \hat{S}(n,2) = 3(2^n - 2)$ из них отвечают функциям, у которых образ совпадает либо с подмножеством $\{y_1, y_2\}$, либо с подмножеством $\{y_1, y_3\}$, либо с подмножеством $\{y_2, y_3\}$. У остальных функций образ совпадает со всем множеством Y. Следовательно,
$$\hat{S}(n,3) = 3^n - 3(2^n - 2) - 3 = 3(3^{n-1} - 2^n + 1) \qquad \Longrightarrow \qquad S(n,3) = \frac{3^{n-1} - 2^n + 1}{2}.$$

4. Докажите, что числа Стирлинга $S(n, n-2)$ рассчитываются по формуле
$$S(n, n-2) = \frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}.$$

   Решение: Число $S(n, n-2)$ описывает количество разбиений n-множества на $n-2$ блока. Любое такое разбиение содержит либо три объекта в одном блоке и по одному элементу в оставшихся $(n-3)$-х блоках, либо по два объекта в двух блоках и по одному элементу в оставшихся $(n-4)$-х блоках. Количество разбиений первого типа совпадает с количеством способов выбора трехэлементного подмножества n-элементного множества, то есть равно $\binom{n}{3}$. Количество разбиений второго типа можно сосчитать, выбрав $\binom{n}{2}$ способами элементы первого блока и $\binom{n-2}{2}$ способами элементы второго блока, а затем поделив результат на два — порядок этих блоков нам не важен. Как следствие,

$$S(n,n-2)=\binom{n}{3}+\frac{1}{2}\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}=\frac{n!}{3!(n-3)!}+\frac{n!\,(n-2)!}{2^3\,(n-2)!\,(n-4)!}=\frac{n(n-1)(n-2)(3n-5)}{24}.$$

5. Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n-множества без блоков единичной длины. Найдите рекуррентную формулу для $F(n)$, по аналогии с числами Белла.

   Решение: Покажем, что $F(n)$ удовлетворяют рекуррентному соотношению вида

$$F(n+1)=\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}F(k).$$

   Все множество таких разбиений мы можем разбить на блоки в зависимости от количества i элементов, $i=1,\dots,n$, содержащихся в одном блоке с числом $n+1$. Выбирая $\binom{n}{k}$ способами, где $k=n-i$, k элементов, не входящих в один блок с $n+1$, и строя из этих элементов разбиение, не содержащее блоков единичной длины $F(k)$ способами, мы и получаем требуемое рекуррентное соотношение.

6. Докажите утверждение

$$\hat{S}(n,k)=\sum_{i=0}^{k}(-1)^{k-i}\binom{k}{i}\cdot i^n.$$

   с помощью формулы включения-исключения

$$|\bigcap_{i=0}^{n}\bar{A}_i|=|X|-\sum_{i}|A_i|+\sum_{i<j}|A_i\cap A_j|-\sum_{i<j<k}|A_i\cap A_j\cap A_k|+...+(-1)^n|A_1\cap...\cap A_n|$$

   Решение: Рассмотрим X - множество всех отображений из n-множества в k-множество, и $A_i\subset X$ - те из них, которые не содержат в образе i-й элемент. Ясно, что $|A_1\cap...\cap A_l|=(k-l)^n$, а таких пересечений (в которых пересекается l множеств) $\binom{k}{l}$. Вот и получается, что $\sum\limits_{i_1<i_2<...<i_l}|A_{i_1}\cap...\cap A_{i_l}|=\binom{k}{l}(k-l)^n$ и применяя формулу включения-исключения, получаем требуемую сумму.

7. [2 балла] Докажите, что количество разбиений n-элементного множества, при котором ни в одном блоке не содержится пара последовательно идущих чисел, описывается числом Белла $B(n-1)$.

   Решение: Установим биекцию между произвольным разбиением описанного выше вида и всеми разбиениями $(n-1)$-элементного множества n. Для этого рассмотрим произвольное разбиение, в котором ни в каком блоке не содержатся два подряд идущих числа. Выделим в этом разбиении блок, содержащий элемент n. Все элементы в нем отличны от $n-1$. Если этот блок содержит единственный элемент n, то мы можем просто удалить этот блок и получить некоторое разбиение $(n-1)$-элементного множества на блоки. В противном случае мы можем взять любой элемент $j\neq n$ и переместить его в блок, содержащий элемент $j+1$. Перенося из блока, содержащего n, все элементы, отличные от n, а затем удаляя блок, состоящий из единственного элемента n, мы вновь получаем некоторое разбиение $(n-1)$-элементного множества.

Обратно, взяв любое разбиение $(n-1)$-элементного множества на блоки, мы можем добавить еще один блок, содержащий элемент n. Будем теперь идти по числам исходного разбиения, начиная с наибольшего числа $n-1$. Предположим, что мы нашли в каком-то из блоков пару соседних элементов j и $j+1$, $j < n-1$. Перенесем элемент j в блок, содержащий n. В результате у нас в любом блоке останутся числа, отличающиеся как минимум на две единицы друг от друга.