

# 1 Дополнительные задания

## 1.1 Алферов

1. Сделать ИДЗ-1(3)
2. Пусть  $G \neq \{1\}$  конечная  $p$ -группа. Покажите, что центр  $G$  нетривиален.
3. Разложить  $\mathbb{Z}/620\mathbb{Z}$  в прямую сумму примарных циклических подгрупп.
4. Перечислите все попарно неизоморфные абелевы группы порядка 24.
5. Пусть  $D_n$  — группа всех движений плоскости, сохраняющих  $n$ -угольник (мы рассматривали ее когда изучали группу преобразований бус).
  - (a) Докажите, что  $D_n \times C_2 \cong D_{2n}$ .
  - (b) Докажите, что при  $m > 2$  группы  $D_n \times C_m$  и  $D_{mn}$  не могут быть изоморфными.
6. Найдите порядок группы всех автоморфизмов группы  $C_p \times C_q$ , где  $p, q$  — простые числа. Найти  $\gcd(11^{2n} - 64, 9 \cdot 11^n + 16)$ .

## 1.2 Василенко

1. Сделать ИДЗ-1(3)
2. Перечислить все нормальные подгруппы в группах  $S_3, S_4, S_5$ .
3. Пусть  $H \triangleleft G, K \triangleleft G$  и  $H \cap K = \{e\}$ . Докажите, что  $hk = kh \forall h \in H, k \in K$ .
4. Пусть  $A$  — абелева группа, записанная адитивно (операция обозначается '+'). И пусть для  $n \in \mathbb{N}$  выполняется  $nx = 0 \forall x \in A$ . Предположим  $n = rs$ , где  $r, s$  — взаимно простые числа. Пусть  $A_s := \{x \in A : sx = 0\}, A_r := \{x \in A : rx = 0\}$ . Покажите, что  $A_s, A_r \leq A$  и, более того  $A \cong A_r \oplus A_s$ .

Указание: воспользоваться тем, что для взаимно простых чисел  $r$  и  $s$  найдутся такие целые  $m$  и  $k$ , что  $rm + sk = 1$ .
5. Пусть любая подгруппа конечной группы  $G$  абелева. Верно ли, что тогда группа  $G$  абелева.
6. Найти  $\gcd(7^{19} + 3 \cdot 5^{11}, 7^{57} - 5^{34})$ .

### 1.3 Киракосян

1. Доделать ИДЗ-1(1)
2. Пусть  $p$  и  $q$  различные простые числа, причем  $q - 1$  делится на  $p - 1$ . Докажите, что для любого  $a$  взаимно простого с  $pq$  выполнено сравнение  $a^{q-1} \equiv 1 \pmod{pq}$
3. Пусть  $n \in \mathbb{N}$ . Найти  $\gcd(11^{2n} - 64, 9 \cdot 11^n + 16)$ .

### 1.4 Кириленко

1. Сделать ИДЗ-1(3)
2. Найти все простые  $p$ , для которых  $8p^2 + 1$  тоже простое.

### 1.5 Фарутин

1. Приведите пример двух неизоморфных групп  $G_1$  и  $G_2$  и их нормальных подгрупп  $H_1 \trianglelefteq G_1$ ,  $H_2 \trianglelefteq G_2$  таких, что  $H_1 \cong H_2$  и  $G_1/H_1 \cong G_2/H_2$ .
2. Доказать, что если длины сторон и диагонали прямоугольника являются целыми числами, то его площадь делится на 12.

### 1.6 Шувалова

1. Разложить  $\mathbb{Z}/320\mathbb{Z}$  в прямую сумму примарных циклических подгрупп.
2. Найти все простые  $p$ , для которых  $p^6 + 6$  тоже простое.
3. Найти  $\gcd(117, 15^{133} - 3)$ .
4. Покажите, что если  $ab = ba$  и  $\text{ord } a = \text{ord } b = m$ , то  $\text{ord } ab$  может быть любым делителем числа  $m$ .