

Домашнее задание

Note: Во всех заданиях не забывайте про подробности.

О нотации. Всегда, когда различие между групповыми операциями не имеет смысла указывать или операция ясна из контекста, целесообразно вместо (G, \cdot) писать просто G .

Пусть G — группа. Тогда порядком элемента $g \in G$ называется наименьшее такое $n \in \mathbb{N}$, что $g^n = 1$. В этом случае пишут $\text{ord}(g) = n$, если такого n нет, то говорят, что порядок бесконечный.

- 1 Докажите, что в G — группе для каждого $g \in G$ верно: $\text{ord}(g) = \text{ord}(g^{-1})$.
- 2 Докажите, что в любой конечной группе с чётным числом элементов найдётся элемент порядка 2.
- 3 Докажите, что любая группа, где каждый элемент имеет порядок 2, является абелевой.
- 4 Постройте поле K из четырёх элементов, заполнив приложенную таблицу операций:

+	0	1	α	β
0				
1				
α				
β				

\cdot	0	1	α	β
0				
1				
α				
β				

То есть поле состоит из четырёх элементов, два из которых обозначаются 0 и 1, имея смысл нейтрального элемента по сложению и нейтрального по умножению соответственно. Остальные два имеют абстрактные названия, а их взаимодействие предстоит построить. Обратите внимание при построении, на то, выполняются ли аксиомы поля. Они должны.