Мощность множества.

1. Пусть множества A и B равномощны. Докажите, что множества $A \times A$ и $B \times B$ также равномощны.

2. Докажите, что множество простых чисел счетно.

3. Докажите, что множество конечных подмножеств рациональных чисел счетно.

4. Установите взаимно однозначное соответствие между множеством бесконечных последовательностей из 0 и 1 и множеством бесконечных последовательностей из (i) 0, 1, 2, 3; (ii) 0, 1, 2.

5. Пусть множество A конечно, а множество B счетно. Докажите, что множество функций $f\colon A \to B$ счетно.

6. Функция называется периодической, если для некоторого числа T и любого x выполняется $f(x+T) = f(x)$. Докажите, что множество периодических функций $f\colon \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ счетно.

7. Говорят, что $g : B \to A$ является *левой обратной* (соответственно *правой обратной*) к f, если $g \circ f = id_A$ (соответственно $f \circ g = id_B$).
   (a) Приведите примеры, когда левая обратная не является правой обратной и когда правая обратная не является левой.
   (b) Может ли такое случиться для конечных множеств?
   (c) Может ли быть так, что у одной функции есть и левая, и правая обратные, но они различны?
   (d) Для каких функций существует левая обратная?
   (e) Для каких функций существует правая обратная?

8. Установите взаимно однозначное соответствие между отрезком $[0, 1]$ и интервалом $(0, 1)$.

9. Пусть A бесконечно, а B счетно. Верно ли, что множество $A \cup B$ равномощно множеству A?

10. Докажите, что множество непересекающихся отрезков на прямой конечно или счетно.

11. Установите взаимно однозначное соответствие между окружностью радиуса 1 и окружностью радиуса $R > 0$.

12. Установите взаимно однозначное соответствие между окружностью единичного радиуса и множеством действительных чисел $\mathbf{R}$.

13. Установите взаимно однозначное соответствие между интервалом $(0, 1)$ и действительной прямой $(-\infty, +\infty)$.

14. Множество A будем называть конечным, если для некоторого натурального n есть биекция из A в $\{1, \ldots, n\}$. При этом n называется мощностью A. Докажите, что только бесконечное множество может быть равномощно собственному подмножеству.

15. Разбейте единичный круг (с границей) на непересекающиеся отрезки ненулевой длины.