

Задания

24 января 2019 г.

- Опишите в категории (пред)порядка следующие конструкции:
 - Терминальные объекты.
 - Произведения объектов.
- Пусть в категории \mathbf{C} существует терминальный объект 1 . Докажите, что для любого объекта A в \mathbf{C} существует произведение $A \times 1$.
- Докажите, что любой морфизм из терминального объекта является мономорфизмом.
- Пусть в категории \mathbf{C} существует терминальный объект 1 и некоторый морфизм $1 \rightarrow B$. Докажите, что любая проекция $\pi_1 : A \times B \rightarrow A$ является эпиморфизмом.
- Докажите, что в \mathbf{Ab} существуют все произведения.
- Докажите, что два определения уравнителей, приводившихся в лекции, эквивалентны.
- Докажите, что уравнитель пары стрелок $f, g : A \rightarrow B$ уникален с точностью до изоморфизма. То есть, если $e_1 : E_1 \rightarrow A$ и $e_2 : E_2 \rightarrow A$ – два уравнителя f и g , то существует уникальный изоморфизм $i : E_1 \rightarrow E_2$ такой, что $e_2 \circ i = e_1$.
- Морфизм $h : B \rightarrow B$ называется *идемпотентным*, если $h \circ h = h$. Докажите следующие факты:
 - Если $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ – такие, что $g \circ f = id_A$, то $h = f \circ g$ является идемпотентным.
 - Если в категории есть уравнители, то обратное верно. Конкретно, для любого идемпотентного морфизма $h : B \rightarrow B$ существуют $f : A \rightarrow B$ и $g : B \rightarrow A$ такие, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = h$.
- Докажите, что любой расщепленный мономорфизм регулярен.

10. Мономорфизм $f : A \rightarrow B$ называется *сильным*, если для любой коммутативного квадрата, где $e : C \rightarrow D$ является эпиморфизмом,

$$\begin{array}{ccc} C & \longrightarrow & A \\ e \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ D & \longrightarrow & B \end{array}$$

существует стрелка $D \rightarrow A$ такая, что диаграмма выше коммутует. Докажите, что любой регулярный мономорфизм силен.

11. Мономорфизм $f : A \rightarrow B$ называется *экстремальным*, если для любого эпиморфизма $e : A \rightarrow C$ и любого морфизма $g : C \rightarrow B$ таких, что $g \circ e = f$, верно, что e – изоморфизм. Докажите, что любой сильный мономорфизм экстремален.
12. Докажите, что если в категории все мономорфизмы регулярны, то она сбалансирована. Можно ли усилить это утверждение?
13. Докажите, что в **Set** все мономорфизмы регулярны.
14. Докажите, что в **Ab** все мономорфизмы регулярны.

Бонусные задания:

- Докажите, что если в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то он бесконечен.
- Докажите, что если в категории \mathbf{C}_M существуют бинарные произведения и моноид M нетривиален, то для любого натурального $n > 1$ существует $x \in M$ такой, что $x \neq 1$ и $x^n = 1$.
- Приведите пример моноида M такого, что в категории \mathbf{C}_M существует бинарные произведения.