Вероятности

1. Подсчитайте мощность пространства Ω элементарных событий для следующих случайных экспериментов:

   (a) производится выстрел по мишени, представляющей собой 10 концентрических кругов, помеченных числами от 1 до 10;

   (b) три раза подбрасывается игральная кость;

   (c) наудачу извлекается одна кость из игры в домино.

   Решение

   В первом случайном эксперименте имеется 11 элементарных исходов (один — попасть мимо мишени), во втором — $6^3 = 216$ (на выходе — строка из трех символов над алфавитом из шести чисел), а в третьем $|\Omega| = 72 = 28$ (любая кость домино — это элемент 2-мультимножества над множеством X из семи элементов $\{0, 1, \ldots, 6\}$).

2. В неидеальной игральной кости вероятность выпадения числа i на грани пропорциональна i (то есть $\Pr(1) = x$, а $\Pr(i) = i \cdot x$). Обозначим через A событие, состоящее в выпадении числа, меньшего 5, а через B — событие, состоящее в выпадении нечетного числа. Определите вероятности событий A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$.

   Решение

   Заметим, что вероятность $\Pr(\omega_i)$ наступления элементарного события ω_i, заключающегося в выпадении числа i, равна $i/(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = i/21$. Как следствие,

   $$\Pr(A) = (1 + 2 + 3 + 4)/21 = 10/21, \Pr(B) = (1 + 3 + 5)/21 = 9/21 = 3/7,$$

   а вероятности

   $$\Pr(A \cap B) = (1 + 3)/21 = 4/21, \qquad \Pr(A \cup B) = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)/21 = 15/21,$$

   $$\Pr(A \setminus B) = (2 + 4)/21 = 6/21.$$

3. В лотерее загадывают множество из пяти чисел от 1 до 36. Какова вероятность угадать его? Какова вероятность угадать хотя бы одно?

   Решение

   Очевидно, что вероятность описанного в задании элементарного события ω равна

   $$\Pr(\omega) = \frac{1}{|\Omega|},$$

   где Ω есть множество всех возможных элементарных событий. Мощность этого множества совпадает с количеством 5-элементных подмножеств 36-элементного множества, то есть равна $\binom{36}{5}$. Следовательно,

   $$\Pr(\omega) = \frac{1}{\binom{36}{5}} = \frac{5! \cdot 31!}{36!} = \frac{5!}{32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36} = \frac{1}{376992} = 2,65 \cdot 10^{-6}.$$

   Для решения второй части данной задачи введем два события — событие A, заключающееся в том, что человек угадывает хотя бы одну правильную цифру, и событие $B = \bar{A}$, состоящее в том, что он все цифры угадал неправильно. В этой задаче легче найти вероятность события B, а затем из формулы

$$\Pr(A) = 1 - \Pr(B)$$

определить вероятность искомого события A. Действительно, вероятность того, что все пять цифр будут неправильными, определяется количеством всех 5-подмножеств $(36 - 5) = 31$-элементного множества. Следовательно,

$$\Pr(A) = 1 - \frac{\binom{31}{5}}{\binom{36}{5}} = 0.549.$$

4. Предположим, что вы участвуете в игре, в которой вам предлагают выбрать одну из трех дверей; за одной из этих дверей находится какой-то приз, за двумя другими приза нет. Пусть вы выбрали одну из дверей, скажем, первую дверь. Ведущий игры, не открывая этой двери и зная, что расположено за ней, открывает еще одну дверь дверь, за которой приза нет (пусть это будет, для определенности, вторая дверь), а затем предлагает вам изменить свое решение, выбрав третью дверь. Имеет ли вам смысл изменить свое решение?

5. Три студента решают независимо друг от друга одну и ту же задачу. Вероятности решения студентами этой задачи равны, соответственно, 0.8, 0.7 и 0.6. Найдите вероятность того, что хотя бы один из них решит задачу.

   Решение

   Пусть A_i есть событие, состоящее в том, что i-й студент решил задачу. Вероятности этих событий равны, по условию, $\Pr(A_1) = 0.8$, $\Pr(A_2) = 0.7$ и $\Pr(A_3) = 0.6$. Рассмотрим теперь событие B, заключающееся в том, что хотя бы один из студентов решил задачу. Проще искать вероятность не события B, а противоположного ему события $\bar{B}$, описывающего ситуацию, когда ни один из студентов задачу не решил. Вероятность такого события равна

   $$\Pr(\bar{B}) = \Pr(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \bar{A}_3) = \Pr(\bar{A}_1) \cdot \Pr(\bar{A}_2) \cdot \Pr(\bar{A}_3) = 0.2 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.024.$$

   Следовательно,

   $$\Pr(B) = 1 - \Pr(\bar{B}) = 0.976.$$

6. Найдите вероятность того, что первый студент решил задачу, если известно, что справился ровно один из них.

   Решение

   Воспользуемся формулой Байеса. A_i - событие, i-й студент решил задачу, B - событие, ровно один студент решил задачу. Для того чтобы воспользоваться формулой Байеса посчитаем некоторые вероятности.

   $$P(A_1) = 0.8 \quad P(A_2) = 0.7 \quad P(A_3) = 0.6$$

   $$P(B|A_1) \cdot P(A_1) = 0.8 \cdot 0.3 \cdot 0.4 = 0.096$$
   $$P(B|A_2) \cdot P(A_2) = 0.7 \cdot 0.2 \cdot 0.4 = 0.056$$
   $$P(B|A_3) \cdot P(A_3) = 0.6 \cdot 0.2 \cdot 0.3 = 0.036$$

   Некоторые пояснения: $P(B|A_i) \cdot P(A_i) = P(B \cap A_i)$ - вероятность того, что решил задачу только i-ый студент.

$$P(A_1|B) = \frac{P(B|A_1) \cdot P(A_1)}{P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + P(B|A_3) \cdot P(A_3)} = \frac{0.096}{0.096 + 0.056 + 0.036} = \frac{24}{47}$$