1 Правила сдачи выводов формул

Когда требуется показать вывод, не используя ничего, то приемлемые формы ответа:

- В виде дерева вывода, узлы которого — аксиомы или modus ponens;
- В виде последовательности формул, каждая из которых — аксиома или modus ponens. Для modus ponens нужно уточнять, какие две формулы (из тех, что доказаны выше) подаются ему как посылки.
- В виде терма типа `PropCalc`.
- Если *очень* аккуратно и с *очень* сильной уверенностью, что получится не выйти за пределы представимого в чистом исчислении, то в виде программы в бесточечном стиле.

Когда требуется показать вывод, используя что угодно, то приемлемые формы ответа пополняются такими вариантами:

- В виде дерева вывода, узлы которого — что угодно, что известным способом транслируется в чистое исчисление;
- В виде последовательности формул с дополнительными правилами;
- В виде терма типа `PropCalcCtx`.
- Если *очень* аккуратно, то в виде программы, состоящей из чистого лямбда-исчисления, расширенного парами, `Either` и `Not`. Сопоставлять `Not` с образцом при этом нельзя.

2 Задания

1. Напишите, не используя никаких вспомогательных конструкций, вывод в исчислении высказываний для формулы $A \to (A \to C) \to C$. Легче всего воспользоваться леммой о дедукции, а затем избавиться от контекста по алгоритму с лекции.
2. Напишите, используя любые вспомогательные конструкции, вывод в исчислении высказываний для формул:
   (a) $\neg(A \wedge B) \to \neg A \vee \neg B$
   (b) $\neg(A \vee B) \to \neg A \wedge \neg B$
   (c) $((A \to B) \to A) \to A$
3. Напишите, не используя никаких вспомогательных конструкций, вывод в исчислении высказываний для формулы $A \wedge B \vee A \to A$.
4. В лекции был дан вывод $\neg\neg A \to A$. Перепишите его через аксиомы и modus ponens, без вспомогательных конструкций. Для этого достаточно заменить $(\neg\text{elim})$, (case analysis) и $(\to \text{intro})$ на их доказательства.
5. Напишите, используя любые вспомогательные конструкции, вывод для формул в исчислении высказываний.

(a) $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \to A \wedge (B \vee C)$ Возможное доказательство: “Нужно доказать $A \wedge (B \vee C)$. Для этого достаточно отдельно доказать A и $B \vee C$ (аксиома 5). A верно по разбору того, почему верна посылка (аксиома 8): если она верна потому, что $A \wedge B$, то нам известно, что выполняется A (аксиома 3); если она верна потому, что $A \wedge C$, нам точно так же известно, что A (аксиома 3). $B \vee C$ тоже верно по разбору случаев (аксиома 8): если верно $A \wedge B$, то верно B (аксиома 4), а значит, верно $B \vee C$ (аксиома 6); если же верно $A \wedge C$, то верно C (аксиома 4), а потому верно и $B \vee C$ (аксиома 7)”.

(b) $A \wedge (B \vee C) \to (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$

(c) $(P \to Q) \to (\neg Q \to \neg P)$ Возможное доказательство на человеческом языке: “Нужно доказать Q, зная, что верно P и из $\neg Q$ следует $\neg P$. Рассмотрим, истинное ли Q. Если да, то всё доказано. Если же оно ложно, то истинно $\neg P$. Но мы также знаем, что истинно P. Мы пришли к противоречию, значит, Q истинно”.

(d) $(A \vee B) \wedge (A \vee C) \leftrightarrow A \vee (B \wedge C)$

(e) $(A \to B) \to (A \vee B) \to (B \to C) \to C$

(f) $\neg\neg A \to (A \vee B)$