

Теория категорий

Естественные преобразования

Валерий Исаев

19 февраля 2019 г.

Подкатегории

Естественные преобразования

Подкатегории

- ▶ *Подкатегория \mathbf{C}'* категории \mathbf{C} – это подкласс объектов \mathbf{C} и для каждой пары объектов X, Y в \mathbf{C}' подкласс множества $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ такие, что \mathbf{C}' содержит тождественные морфизмы для любого $X \in \mathbf{C}'$ и замкнут относительно композиции.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *строгим (faithful)*, если для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ функция $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ инъективна.
- ▶ Подкатегории категории \mathbf{C} – классы эквивалентности строгих инъективных на объектах функторов.

Полные подкатегории

- ▶ Подкатегория \mathbf{C}' категории \mathbf{C} называется *полной*, если для любых объектов X, Y в \mathbf{C}' множества $\text{Hom}_{\mathbf{C}'}(X, Y)$ и $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y)$ равны.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называется *полным*, если для любых $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ функция $F : \text{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(X), F(Y))$ сюръективна.
- ▶ Полные подкатегории категории \mathbf{C} – классы эквивалентности полных строгих функторов.
- ▶ Полные строгие функторы мы будем называть *вложениями* категорий.

Примеры

- ▶ **FinSet** – полная подкатегория **Set**.
- ▶ **Ab** – полная подкатегория **Grp**.
- ▶ Категория частичных порядков – полная подкатегория предпорядков.
- ▶ Категория предпорядков вкладывается в категорию категорий.
- ▶ Категория моноидов вкладывается в категорию категорий.
- ▶ Существует не полное вложение **Agda** в **Set**.
- ▶ Все забывающий функторы, которые мы рассматривали, являются строгими.
- ▶ Обратное тоже верно: любой строгий функтор является в некотором смысле забывающим.

Подкатегории

Естественные преобразования

Определение

- ▶ Можно определить понятие морфизма между функторами $F, G : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$.
- ▶ *Естественное преобразование* $\alpha : F \rightarrow G$ – это функция, сопоставляющая каждому объекту X из \mathbf{C} морфизм $\alpha_X : F(X) \rightarrow G(X)$, удовлетворяющая условию, что для любого морфизма $f : X \rightarrow Y$ в \mathbf{C} следующий квадрат коммутирует:

$$\begin{array}{ccc} F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) \end{array}$$

Категория функторов

- ▶ Естественных преобразование отображает только объекты, но можно показать, что оно задает действие и на морфизмах.
- ▶ Если $\alpha : F \rightarrow G$ – естественное преобразование, то каждому морфизму $f : X \rightarrow Y$ в \mathbf{C} можно сопоставить морфизм $\alpha_f : F(X) \rightarrow G(Y)$ в \mathbf{D} .
- ▶ Морфизм α_f определяется как композиция $F(f) \circ \alpha_X$, что равно $\alpha_Y \circ G(f)$ по естественности.
- ▶ Этот морфизм – это диагональ в коммутативном квадрате, который появляется в определении естественности.

Композиция естественных преобразований

- ▶ Если $\alpha : F \rightarrow G$ и $\beta : G \rightarrow H$ – пара естественных преобразований, то можно определить их композицию $\beta \circ \alpha : F \rightarrow H$ как функцию, сопоставляющую каждому X из \mathbf{C} морфизм $\beta_X \circ \alpha_X : F(X) \rightarrow H(X)$.
- ▶ Композиция $\beta \circ \alpha$ – естественна:

$$\begin{array}{ccccc}
 F(X) & \xrightarrow{\alpha_X} & G(X) & \xrightarrow{\beta_X} & H(X) \\
 F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) & & \downarrow H(f) \\
 F(Y) & \xrightarrow{\alpha_Y} & G(Y) & \xrightarrow{\beta_Y} & H(Y)
 \end{array}$$

Категория функторов

- ▶ Для любого функтора $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ существует тождественное естественное преобразование, сопоставляющее каждому X тождественный морфизм $id_{F(X)} : F(X) \rightarrow F(X)$.
- ▶ Композиция – ассоциативна, тождественное преобразование является единицей для композиции.
- ▶ Таким образом, для любой пары категорий \mathbf{C} и \mathbf{D} существует категория функторов, которая обозначается $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.

Эквивалентность категорий

- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ называются *эквивалентностью* категорий, если существует функтор $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$, такой что $G \circ F$ изоморфен $Id_{\mathbf{C}}$ в категории $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$, и $F \circ G$ изоморфен $Id_{\mathbf{D}}$ в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{D}}$.
- ▶ Категории \mathbf{C} и \mathbf{D} называются *эквивалентными*, если существует эквивалентность $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$.
- ▶ Чтобы убедиться, что функтор является эквивалентностью, нужно проверять много условий.
- ▶ Функтор $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ является эквивалентностью, если он полный, строгий и *существенно сюръективен на объектах*.
- ▶ Последнее условие означает, что для любого объекта X в \mathbf{D} существует объект Y в \mathbf{C} , такой что $F(Y)$ изоморфен X .

Пример

- ▶ Определим функтор $F : \mathbf{Mat} \rightarrow \mathbf{Vec}$, такой что $F(n) = \mathbb{R}^n$ и $F(A)(v) = A \cdot v$.
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что между линейными операторами и матрицами есть биекция, которая описывается указанным выше способом.
- ▶ Таким образом, этот функтор полный и строгий.
- ▶ Из линейной алгебры мы знаем, что любое конечномерное векторное пространство V изоморфно пространству $\mathbb{R}^{\dim(V)}$.
- ▶ Таким образом, F – существенно сюръективен на объектах, и, следовательно, является эквивалентностью.

Доказательство

Proposition

Функтор является эквивалентностью тогда и только тогда, когда он полный, строгий и существенно сюръективен на объектах.

Доказательство.

Пусть $F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ – эквивалентность категорий. Пусть $G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ – обратный к нему, $\alpha : G \circ F \simeq Id_{\mathbf{C}}$ и $\beta : F \circ G \simeq Id_{\mathbf{D}}$. Тогда F – существенно сюръективен на объектах.

Действительно, для любого $X \in Ob(\mathbf{D})$ возьмём $Y = G(X)$, тогда $\beta_X : F(G(X)) \simeq X$.

Покажем, что F – строгий. Пусть $F(f) = F(f')$ для некоторых $f, f' : X \rightarrow Y$. Тогда по естественности α получается, что $f = \alpha_Y \circ G(F(f)) \circ \alpha_X^{-1} = \alpha_Y \circ G(F(f')) \circ \alpha_X^{-1} = f'$. Аналогично доказывается, что G – строгий. □

Доказательство (продолжение)

Докажем, что F – полный. Пусть $h : F(X) \rightarrow F(Y)$ – некоторая стрелка. Тогда определим стрелку $f : X \rightarrow Y$ как следующую композицию:

$$X \xrightarrow{\alpha_X^{-1}} G(F(X)) \xrightarrow{G(h)} G(F(Y)) \xrightarrow{\alpha_Y} Y$$

Тогда $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(h)$. С другой стороны, по естественности α у нас есть равенство $\alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X = G(F(f))$. Следовательно $G(h) = G(F(f))$. По строгости G мы получаем, что $h = F(f)$. Таким образом, f – прообраз h , то есть F – полный.

Доказательство (в обратную сторону)

Пусть F – полный, строгий и существенно сюръективен на объектах. Тогда для любого $X \in Ob(\mathbf{D})$ существует объект $Y \in Ob(\mathbf{C})$ и изоморфизм $\alpha_X : F(Y) \simeq X$. Определим $G : Ob(\mathbf{D}) \rightarrow Ob(\mathbf{C})$ как функцию, возвращающую на каждом X такой Y (не важно какой конкретно).

$$\begin{array}{ccc}
 F(G(X)) & \xrightarrow{\alpha_X} & X \\
 \downarrow F(f') & & \downarrow f \\
 F(G(Y)) & \xrightarrow{\alpha_Y} & Y
 \end{array}$$

Так как F полон, то для каждого $f : X \rightarrow Y$ существует $f' : G(X) \rightarrow G(Y)$, такая что $F(f') = \alpha_Y^{-1} \circ f \circ \alpha_X$. Так как F строг, то такая стрелка уникальна. Положим $G(f) = f'$. Из уникальности f' следует, что G сохраняет id и \circ .

Доказательство (продолжение)

Осталось проверить, что $G \circ F \simeq Id_C$ и $F \circ G \simeq Id_D$.

Преобразование $\alpha_X : F(G(X)) \simeq X$ естественно, так как коммутативный квадрат на предыдущем слайде – в точности квадрат естественности α .

Так как F – полный, то для любой стрелки

$\alpha_{F(Y)} : F(G(F(Y))) \rightarrow F(Y)$ существует прообраз

$\beta_Y : G(F(Y)) \rightarrow Y$. Все β_Y – изоморфизмы, так как обратные к ним – это прообразы $\alpha_{F(Y)}^{-1} : F(Y) \rightarrow F(G(F(Y)))$.

Доказательство (окончание)

Осталось проверить, что β естественен.

$$\begin{array}{ccc} G(F(X)) & \xrightarrow{\beta_X} & X \\ G(F(f)) \downarrow & & \downarrow f \\ G(F(Y)) & \xrightarrow{\beta_Y} & Y \end{array}$$

Применив F к диаграмме выше, она начинает коммутировать, так как α естественен. Но так как F – строгий, исходная диаграмма также коммутирует.